

VaRの定義

リスクマネジメント
資産運用とリスク管理

2004年後期 火曜6限

VaRの定義

- VaR:
ある証券またはポートフォリオをある一定期間(“保有期間”, “投資ホライズン”, “リスク・ホライズン”) (例: 1日, 10日(10営業日(2週間))など)保有するときに, ある一定の確率(“信頼水準”)で発生する最大損失額。

VaRの定義

- 注意:
VaRは確率的な概念である。
現実に発生し得る損失額がVaR値をいくらからい超えるか.....×
現実に発生し得る損失額がVaR値をどれくらい超えやすいか.....○

VaRの定義

- 例: 信頼水準99%の1日VaR=100万ドル

1日の保有で発生する損失額が100万ドルを超える確率は1%

VaR計測手順

- 1. ある特定期間H(1日や10日など)後のポートフォリオ価値(または収益率)の分布を求める。
 - ・ノンパラメトリックVaR
過去の価格分布から求める
 - ・パラメトリックVaR
解析的に分布を仮定して求める
(例: 価格が対数正規分布に従う, 収益率が正規分布に従う)

VaR計測手順

- 2. 信頼水準に応じて, 分布の%点を求める。

信頼水準99%, 正規分布に従っているとすると
 $VaR = \text{期待利益/損失} - 99\% \text{信頼水準における最大の損失額} = 2.33\sigma$ (2.33が信頼係数)
 $VaR' (\text{絶対VaR}) = 99\% \text{信頼水準における最大の損失額} = 2.33\sigma - \text{期待利益/損失}$

VaRの定義

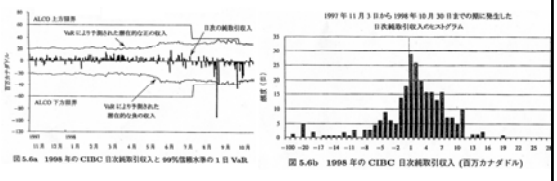
- 数式で表す
現時点でのポートフォリオの時価評価額: V ;
保有期間: H ; 期間 H の収益率: \tilde{R} ;
期待収益率: μ [$\mu = E(\tilde{R})$];
信頼水準 c に対する最大損失率: R^* ; $V^* = V(1+R^*)$
- $$\text{VaR}(H, c) = E(V_H) - V = V(1+\mu) - V(1+R^*) = V(\mu - R^*)$$
- $$\text{VaR}'(H, c) = -VR^*$$

VaRの定義

- 数値例:
 $V = 100, \mu = 5\%, R^* = -20\%$
 $\text{VaR} = V(\mu - R^*) = 100(5\% - (-20\%)) = 25$
 $\text{VaR}' = -VR^* = -100 * (-20\%) = 20$
- $V = 100, \mu = -5\%, R^* = -20\%$
 $\text{VaR} = 100(-5\% - (-20\%)) = 15$
 $\text{VaR}' = 20$

5.3.1 ノンパラメトリックVaR

- ヒストリカルデータから作られる分布を用いて計算



平均 = 0.451 百万カナダドル; 1%点 = -25.919 百万カナダドル
 $\text{VaR} = 0.451 - (-25.919) = 26.370$ 百万カナダドル;
 $\text{VaR}' = 25.919$ 百万カナダドル

5.3.2 パラメトリックVaR

1. 分布を仮定
(VaRの計算を簡単にするために収益率が確率密度関数 $f(R)$ をもつと仮定する)
2. ヒストリカルデータから、仮定した分布のパラメータを推定
3. VaRを求める

5.3.2.1 収益率が正規分布に従うと仮定する場合

- R が平均 μ , 標準偏差 σ の正規分布に従うと仮定する

$$f(R) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{R-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$P(R < R^*) = \int_{-\infty}^{R^*} f(R) dR = P\left(z < \frac{R^* - \mu}{\sigma}\right) = 1 - c$$

標準正規分布

$R^* = \mu + \alpha\sigma$
 $\text{VaR}(H, c) = V(\mu - R^*) = -\alpha\sigma V$; $\text{VaR}' = (\mu + \alpha\sigma)V$

5.3.2.2 収益率がt分布に従うと仮定する場合

- “ファットテイル” (Fat Tail)
(収益率の分布が正規分布より裾が相対的に厚い)
巨額損失の発生確率が正規分布と仮定したときより大きい

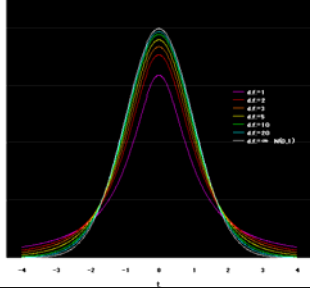
中心極限定理によって、個々のリスクファクターの収益率が正規分布でなくても、多く(標本サイズ)の異なるリスクファクターに対して十分分散投資(独立性)されたポートフォリオの収益率は正規分布に収束する。

中心極限定理:
 $\{X_n\}$ は独立で、その分散が有限、 $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ とする。すべての $\epsilon > 0$ に対し
 $\frac{1}{\sqrt{V(S_n)}} \sum_{k=1}^n E\left((X_k - EX_k)^2, |X_k - EX_k| \geq \epsilon\sqrt{V(S_n)}\right) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$
 ならば
 $S_n \sim N(ES_n, V(S_n))$

5.3.2.2 収益率がt分布に従うと仮定する場合

- 正規分布の仮定が不適切な場合、より裾の厚いt分布を仮定する。

t分布は平均と分散以外に、自由度というパラメータがある。自由度が小さいほど裾が厚くなる。自由度が大きくなると、正規分布に収束する。多くの金融時系列において自由度が4から8であることが指摘されている。
計算：密度関数を置き換えればよい。



5.3.3 1日VaRを用いて10日VaRを計算する方法

- 正規分布の再生性
- 日次収益 R_t が i.i.d.



$$10日収益 R(10) = \sum_{t=1}^{10} R_t$$

$$R(10) \sim N(10\mu, 10\sigma^2)$$

$$VaR(10; c) = \sqrt{10} VaR(1; c)$$

ただし、収益率が i.i.d. でなければ (平均回帰、系列相関)、結果はただしくない。

5.3.4 リスクマネジメントのためのVaR

- リスクファクター、証券、アセットクラスにわたり、共通で一貫した統合リスク計測を提供

複数のリスクファクター間の相関も考慮し、全体のリスクを計測する。ポートフォリオ理論のアイデアを取り入れた枠組みにおいて、リスクを計測する。

5.3.4 リスクマネジメントのためのVaR

- 合計されたリスク量がわかる

この数値で所要自己資本、RAROCがわかる。リスク調整後パフォーマンスを計測できる。

- VaRを用いて表現された取引制限で、ある業務部門がとっているリスクを監視できる

企業内どこが最も大きいリスクをとっていることを把握でき、最も無防備な状態にあるリスクの種類を特定できる。

5.3.4 リスクマネジメントのためのVaR

- 上級管理職、取締役会、規制当局は理解しやすいリスク測度を得ることができる
投資やプロジェクトの事前評価の参考になる
- 業務部門内だけでなく部門間の分散投資から発生する利益の評価ができる
- 内部報告と外部報告の道具
VaR報告書が作成され、報告公表される。格付けにも考慮される

Log-return, 連続複利によるVaRの計算式

$$R = \log \frac{V + \Delta V}{V}; V_H = V e^{\tilde{R}}$$

$$E[V_H] = V E[e^{\tilde{R}}]; V^* = V e^{R^*};$$

$$E[\Delta V] = V (E[e^{\tilde{R}}] - 1); \Delta V^* = V (e^{R^*} - 1);$$

$$VaR = V (E[e^{\tilde{R}}] - e^{R^*})$$

$$VaR^* = V (1 - e^{R^*})$$